| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 472732<br>18 giugno 2024 |
|---|---|---|

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

| | |
|---|---|
| 1 | a |
| 2 | a |
| 3 | a |
| 4 | b |
| 5 | a |
| 6 | b |
| 7 | a |
| 8 | a |
| 9 | d |
| 10 | b |

**1.** La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$

► (a) ha massimo ma non ha minimo

(b) non ha né massimo né minimo

(c) ha sia massimo che minimo

(d) ha minimo ma non ha massimo

*Soluzione*:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$

La funzione $f$ è continua e pari.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Dato che $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, dal teorema di Weierstrass generalizzato, segue che $f$ ha massimo ma non ha minimo.

**2.** Il limite $\lim_{x \to 2} \frac{(x^2-4x+4)^2}{(e^{x^2-4}-1)^4}$

► (a) è un numero reale diverso da 0

(b) vale $+\infty$

(c) non esiste

(d) vale 0

*Soluzione*:

$$\frac{(x^2-4x+4)^2}{(e^{x^2-4}-1)^4} = \frac{(x-2)^4}{(e^{x^2-4}-1)^4} = \left(\frac{x-2}{e^{x^2-4}-1}\right)^4 = \left(\frac{x-2}{e^{(x+2)(x-2)}-1}\right)^4$$

Eseguiamo il cambiamento di variabile $t = x-2$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{e^{(x+2)(x-2)}-1}\right)^4 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{e^{(t+4)t}-1}\right)^4$$

Poiché $e^s = 1+s+o(s)$ per $s\to 0$, con la sostituzione

$s = t(t+4)$ ottoniamo

$$e^{(t+4)t} = 1 + t(t+4) + o(t(t+4)) \quad \text{per } t\to 0 \text{, quindi}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{e^{(t+4)t}-1}\right)^4 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\cancel{1}+t(t+4)+o(t(t+4))\cancel{-1}}\right)^4 =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t+4+o(t+4)}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 .$$

**3.** $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\cos(3x^2)\,dx =$

► (a) $-\frac{1}{6}$ (b) $-2\pi-1$ (c) $-\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ (d) $\frac{1}{6}\left(\sin\sqrt{\frac{\pi}{3}}-\sin\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)$

*Soluzione*:

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$t = 3x^2$ , $\frac{dt}{dx} = 6x$ , $x\,dx = \frac{dt}{6}$

$$\int x\cos(3x^2)\,dx = \int \frac{\cos t}{6}\,dt = \frac{1}{6}\sin t + c = \frac{1}{6}\sin(3x^2) + c$$

Dal teorema di Torricelli avremo:

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\cos(3x^2)\,dx = \left[\frac{1}{6}\sin(3x^2)\right]_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{6}(0-1) = -\frac{1}{6}$$

**4.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\log x)^2} =$

(a) $1 - \log 2$ ► (b) $\dfrac{1}{\log 2} - 1$ (c) $\dfrac{1}{\log 2} - \log 2$ (d) $1 - \dfrac{1}{\log 2} - \log(\log 2)$

*Soluzione*:

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} \qquad \log x = t \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{dx}{x} = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\log x} + c$$

$$\int_{1/e}^{1/2} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_{1/e}^{1/2} = -\frac{1}{\log\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log\frac{1}{e}} = -\frac{1}{-\log 2} + \frac{1}{-\log e}$$

$$= \frac{1}{\log 2} - 1$$

**5.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$

► (a) converge assolutamente (b) converge ma non converge assolutamente

(c) non esiste (d) diverge positivamente

*Soluzione*:

Sia $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$. La funzione $f$ non è definita per $x=0$, dividiamo quindi l'intervallo nel punto $x=1$.

Per $x \in (0,1]$ $f(x) \geq 0$ e per $x \to 0$ $\sin x = x + o(x^2)$

quindi $f(x) = \frac{x+o(x^2)}{x^{3/2}} = \frac{x\,(1+o(x))}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}(1+o(x))$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e applichiamo il confronto asintotico.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, quindi $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge e converge anche assolutamente perché $|f(x)| = f(x)$.

Per $x \in [1,+\infty)$ consideriamo $|f(x)|$.

$$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, per il criterio del confronto

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

**6.** L'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \log(1+e^x)\,dx$

(a) diverge positivamente ▶ (b) converge (c) diverge negativamente (d) non esiste

*Soluzione*:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \log(1+e^x)\, dx$$

Poniamo $f(x) = e^x \log(1+e^x)$ e osserviamo che $f$ è continua in $(-\infty, 0]$ e $f(x) \geq 0$ nello stesso intervallo.

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$ con $t = e^x$, osservando che per $x \to -\infty$ $e^x \to 0$.

Quindi $\log(1+e^x) = e^x + o(e^x) = e^x (1 + o(1))$ per $x \to -\infty$.

Scegliamo $g(x) = e^{2x}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x \cdot e^x (1+o(1))}{e^{2x}} = 1 .$$

Osserviamo ora che $\int_{-\infty}^{0} g(x)\, dx$ converge, infatti

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)\, dx = \lim_{M \to -\infty} \int_{M}^{0} e^{2x}\, dx = \lim_{M \to -\infty} \left[ \frac{e^{2x}}{2} \right]_{M}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{M \to -\infty} \left( e^0 - e^M \right) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2} .$$

Per il criterio del confronto asintotico $\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$ converge.

**7.** $\lim_{n \to +\infty} \arctan\left(\frac{e^n}{n^2+1}\right) =$

► (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) non esiste (c) $+\infty$ (d) 0

*Soluzione*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2+1} = +\infty$$ per gerarchia di infiniti, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{n^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

**8.** $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

► (a) converge ma non converge assolutamente

(b) è indeterminata

(c) converge assolutamente

(d) diverge positivamente

*Soluzione*:

$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ Poniamo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ e osserviamo

che $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $(a_n)$ è decrescente quindi, per il criterio di Leibniz la serie converge.

Vediamo ora la convergenza assoluta.

$$\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}\right| = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_n a_n.$$

Scegliamo $b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$ e osserviamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Dato che $\sum_n \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n a_n$ diverge positivamente quindi $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ non converge assolutamente.

**9.** La funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy^2 - yx^2$

(a) è limitata inferiormente ma non superiormente

(b) è limitata

(c) è limitata superiormente ma non inferiormente

► (d) non è né superiormente né inferiormente limitata

*Soluzione*:

$f(x,y) = xy^2 - yx^2$

Consideriamo la restrizione alla retta $y = 2x$

$g(x) = f(x,2x) = x \cdot 4x^2 - 2x \cdot x^2 = 4x^3 - 2x^3 = 2x^3$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ , $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

quindi $f$ non è né superiormente né inferiormente limitata.

**10.** Siano $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^2}{x^2 + y^2}$ e $v = (0,2)$. La derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ vale

(a) 2 ► (b) 0 (c) 1 (d) $-1$

*Soluzione*:

$$f(x,y) = \frac{x^4 - y^2}{x^2+y^2}$$ f è differenziabile in $(1,0)$

$$f_x = \frac{4x^3(x^2+y^2) - (x^4-y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{-2y\,(x^2+y^2) - (x^4-y^2)\,2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(1,0) = \frac{4\cdot 1\,(1+0) - (1-0)\,2\cdot 1}{(1+0)^2} = \frac{4-2}{1} = 2$$

$$f_y(1,0) = \frac{-2\cdot 0\,(1+0) - (1-0)\cdot 2\cdot 0}{(1+0)^2} = 0$$

$$\nabla f(1,0) = (2,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot v = (2,0)\cdot(0,2) = 2\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0$$

| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 270816<br>18 giugno 2024 |
|---|---|---|

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

| | |
|---|---|
| 1 | b |
| 2 | c |
| 3 | c |
| 4 | b |
| 5 | b |
| 6 | a |
| 7 | d |
| 8 | c |
| 9 | a |
| 10 | a |

**1.** La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$

(a) ha sia massimo che minimo

► (b) ha massimo ma non ha minimo

(c) non ha né massimo né minimo

(d) ha minimo ma non ha massimo

*Soluzione*:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$

La funzione $f$ è continua e pari.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Dato che $f(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, dal teorema di Weierstrass generalizzato, segue che $f$ ha massimo ma non ha minimo.

**2.** La derivata della funzione $f(x) = x^4 \left(\log(x^4+1)+1\right)$ è

(a) $x^3 \left(\frac{4}{x^4+1} + x\log(x^4+1)\right)$ (b) $\frac{16x^6}{x^4+1}$

► (c) $4x^3 \left(\frac{2x^4+1}{x^4+1} + \log(x^4+1)\right)$ (d) $x^3 \left(\frac{x^4+x+1}{x^4+1} + 4\log(x^4+1)\right)$

*Soluzione*:

$$f(x) = x^4 \left(\log(x^4+1)+1\right)$$

$$f'(x) = 4x^3 \left(\log(x^4+1)+1\right) + x^4 \cdot \frac{1}{x^4+1} \cdot 4x^3 =$$

$$= 4x^3 \left(\log(x^4+1) + 1 + \frac{x^4}{x^4+1}\right) =$$

$$= 4x^3 \left(\log(x^4+1) + \frac{2x^4+1}{x^4+1}\right)$$

**3.** $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\cos(3x^2)\,dx =$

(a) $-2\pi - 1$ ► (b) $\frac{1}{6}\left(\sin\sqrt{\frac{\pi}{3}} - \sin\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)$ (c) $-\frac{1}{6}$ (d) $-\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

*Soluzione*:

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$t = 3x^2 \quad , \quad \frac{dt}{dx} = 6x \quad , \quad x\,dx = \frac{dt}{6}$

$$\int x \cos(3x^2)\, dx = \int \frac{\cos t}{6}\, dt = \frac{1}{6} \sin t + c = \frac{1}{6} \sin(3x^2) + c$$

Dal teorema di Torricelli avremo:

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x \cos(3x^2)\, dx = \left[\frac{1}{6} \sin(3x^2)\right]_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{6}\left(0 - 1\right) = -\frac{1}{6}$$

**4.** $\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx =$

(a) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2}$ ► (b) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}e^{-2}$ (c) $-\frac{3}{4}e^{-2}$ (d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}$

*Soluzione*:

$\int xe^{-2x}\,dx$ per parti, integrando $e^{-2x}$ e derivando $x$

$$= x\left(-\tfrac{1}{2}\right)e^{-2x} - \int 1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)e^{-2x}\,dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + c$$

$$\Rightarrow \int_0^1 xe^{-2x}\,dx = \left[-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}.$$

**5.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(a) converge ma non converge assolutamente ► (b) converge assolutamente

(c) diverge positivamente (d) non esiste

*Soluzione*:

Sia $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$. La funzione $f$ non è definita per $x=0$, dividiamo quindi l'intervallo nel punto $x=1$.

Per $x \in (0,1]$ $f(x) \geq 0$ e per $x \to 0$ $\sin x = x + o(x^2)$

quindi $f(x) = \frac{x+o(x^2)}{x^{3/2}} = \frac{x\,(1+o(x))}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}\,(1+o(x))$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e applichiamo il confronto asintotico.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, quindi $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge e converge anche assolutamente perché $|f(x)| = f(x)$.

Per $x \in [1,+\infty)$ consideriamo $|f(x)|$.

$$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, per il criterio del confronto $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

**6.** L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^{3\alpha}(1+x^3)}\,dx$ converge se e solo se

► (a) $\alpha < 1$ (b) $\alpha > 3$ (c) $\alpha < \frac{3}{2}$ (d) $\alpha > \frac{2}{3}$

*Soluzione*:

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^{3\alpha}(1+x^3)}\,dx$$

Poniamo $f(x) = \dfrac{\log(1+x^2)}{x^{3\alpha}(1+x^3)}$ e osserviamo che $f$ è continua in $(0,1]$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Vediamo l'andamento di $f$ per $x \to 0^+$.

Se $\alpha \leq 0$ $f$ è continua anche in $x=0$, quindi l'integrale converge.

Se $\alpha > 0$, utilizzando lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t \to 0$ con $t = x^2$, otteniamo

$$f(x) = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^{3\alpha}(1+x^3)} = \frac{1+o(1)}{x^{3\alpha-2}(1+x^3)} = \frac{1}{x^{3\alpha-2}} \cdot \frac{1+o(1)}{1+x^3}$$

Scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x^{3\alpha-2}}$ e otteniamo che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dato che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3\alpha-2}}\,dx$ converge $\iff 3\alpha - 2 < 1 \iff 3\alpha < 3$

$\iff \alpha < 1$, dal criterio del confronto asintotico, otteniamo

che $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha < 1$.

**7.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{e^n}{n^2+1}\right) =$

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) non esiste ► (d) $\dfrac{\pi}{2}$

*Soluzione*:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2+1} = +\infty$ per gerarchia di infiniti, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{n^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

**8.** $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

(a) diverge positivamente

(b) converge assolutamente

► (c) converge ma non converge assolutamente

(d) è indeterminata

*Soluzione*:

$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ Poniamo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ e osserviamo che $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $(a_n)$ è decrescente quindi, per il criterio di Leibnitz la serie converge.

Vediamo ora la convergenza assoluta.

$$\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}\right| = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_n a_n.$$

Scegliamo $b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$ e osserviamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Dato che $\sum_n \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n a_n$ diverge positivamente quindi $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ non converge assolutamente.

**9.** La funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy^2 - yx^2$

► (a) non è né superiormente né inferiormente limitata

(b) è limitata inferiormente ma non superiormente

(c) è limitata

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

*Soluzione*:

$$f(x,y) = xy^2 - yx^2$$

Consideriamo la restrizione alla retta $y = 2x$

$$g(x) = f(x, 2x) = x \cdot 4x^2 - 2x \cdot x^2 = 4x^3 - 2x^3 = 2x^3$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

quindi $f$ non è né superiormente né inferiormente limitata.

**10.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - y^2)^{4/3}}{x^2 + y^2} =$

► (a) 0 (b) $-\infty$ (c) $+\infty$ (d) non esite

*Soluzione*:

$$f(x,y) = \frac{(x^2 - y^2)^{4/3}}{x^2 + y^2}$$

Scriviamo la funzione in coordinate polari

$$g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{(\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta)^{4/3}}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{\rho^{8/3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^{4/3}}{\rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \rho^{2/3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^{4/3}$$

quindi $|g(\rho,\theta)| \leq \rho^{2/3}$ e di conseguenza

$$0 \leq \lim_{\rho \to 0} |g(\rho,\theta)| \leq \lim_{\rho \to 0} \rho^{2/3} = 0.$$

Ne segue che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 303304<br>18 giugno 2024 |
|---|---|---|

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

| | |
|---|---|
| 1 | b |
| 2 | a |
| 3 | a |
| 4 | b |
| 5 | d |
| 6 | c |
| 7 | b |
| 8 | d |
| 9 | a |
| 10 | d |

**1.** La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$

(a) non ha né massimo né minimo

► (b) ha massimo ma non ha minimo

(c) ha minimo ma non ha massimo

(d) ha sia massimo che minimo

*Soluzione*:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$

La funzione $f$ è continua e pari.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Dato che $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, dal teorema di Weierstrass generalizzato, segue che $f$ ha massimo ma non ha minimo.

**2.** $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{(1-\cos(x-3))\,(e^x-1)}{x(x-3)\log(x-2)} =$

► (a) $\dfrac{e^3-1}{6}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $0$ (d) $+\infty$

*Soluzione*:

Facciamo il cambio di variabile $x-3=t$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(1-\cos(x-3))(e^x-1)}{x(x-3)\log(x-2)} = \lim_{t\to 0} \frac{(1-\cos t)(e^{t+3}-1)}{(t+3)\,t\log(1+t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{t+3}-1}{t+3} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)\right)}{t\,(t+o(t))} =$$

$$= \frac{e^3-1}{3} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{2}+o(t^3)}{t\cdot t(1+o(1))} = \frac{e^3-1}{3} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2}\left(\frac{1}{2}+o(t)\right)}{\cancel{t^2}\,(1+o(1))} =$$

$$= \frac{e^3-1}{6}$$

**3.** $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\cos(3x^2)\,dx =$

► (a) $-\dfrac{1}{6}$ (b) $-2\pi-1$ (c) $\dfrac{1}{6}\left(\sin\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}-\sin\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\right)$ (d) $-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$

*Soluzione*:

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$t = 3x^2 \quad , \quad \frac{dt}{dx} = 6x \quad , \quad x\,dx = \frac{dt}{6}$

$$\int x\cos(3x^2)\,dx = \int \frac{\cos t}{6}\,dt = \frac{1}{6}\sin t + c = \frac{1}{6}\sin(3x^2) + c$$

Dal teorema di Torricelli avremo:

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\cos(3x^2)\,dx = \left[\frac{1}{6}\sin(3x^2)\right]_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{6}(0-1) = -\frac{1}{6}$$

**4.** Sia $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$. Allora $F'(1) =$

(a) $0$ ► (b) $2e - e^2$ (c) $e - \frac{e^2}{2}$ (d) $3e^{\frac{1}{3}} - e$

*Soluzione*:

Ricordando che $\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$

otteniamo

$$F'(x) = \frac{e^{x^2}}{x^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{x} - \frac{e^{2x}}{\cancel{2}x} \cdot \cancel{2} = \frac{2e^{x^2} - e^{2x}}{x}$$

$$F'(1) = 2e - e^2.$$

**5.** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$

(a) converge ma non converge assolutamente (b) non esiste

(c) diverge positivamente ► (d) converge assolutamente

*Soluzione*:

Sia $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$. La funzione $f$ non è definita per $x=0$, dividiamo quindi l'intervallo nel punto $x=1$.

Per $x \in (0,1]$ $f(x) \geq 0$ e per $x \to 0$ $\sin x = x + o(x^2)$

quindi $f(x) = \frac{x+o(x^2)}{x^{3/2}} = \frac{x\,(1+o(x))}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}\,(1+o(x))$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e applichiamo il confronto asintotico.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, quindi $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge e converge anche assolutamente perché $|f(x)| = f(x)$.

Per $x \in [1,+\infty)$ consideriamo $|f(x)|$.

$$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, per il criterio del confronto $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

**6.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}\sin x}{\sqrt{x}\,\log(1+x)}\,dx$

(a) non esiste (b) diverge negativamente (c) converge (d) diverge positivamente

*Soluzione*:

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2} \sin x}{\sqrt{x} \log(1+x)}\, dx$$

$e^{x^2} > 0$ sempre $\quad \sin x \geq 0$ se $x \in [0,1]$, $\log(1+x) \geq 0$

$\sqrt{x} \geq 0$.

confronto asintotico. $\boxed{x \to 0}$

$\sin x = x + o(x^2)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

$$\frac{e^{x^2} \sin x}{\sqrt{x} \log(1+x)} = \frac{e^{x^2}(x + o(x^2))}{x^{1/2}(x + o(x))} =$$

$$= e^{x^2} \frac{\cancel{x}(1+o(x))}{x^{1/2}\cancel{x}(1+o(1))} = e^{x^2}\frac{1+o(x)}{x^{1/2}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{1/2}} \boxed{e^{x^2}\frac{1+o(x)}{1+o(1)}}$$

$\downarrow$

$1$

definisco $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e ottengo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx \text{ converge.}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \text{ converge.}$$

**7.** $\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{e^n}{n^2+1}\right) =$

(a) 0 ► (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $+\infty$ (d) non esiste

*Soluzione*:

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2+1} = +\infty$ per gerarchia di infiniti, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{n^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

**8.** $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

(a) è indeterminata (b) diverge positivamente

(c) converge assolutamente ► (d) converge ma non converge assolutamente

*Soluzione*:

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$$ Poniamo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ e osserviamo

che $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $(a_n)$ è decrescente quindi, per il criterio di Leibniz la serie converge.

Vediamo ora la convergenza assoluta.

$$\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}\right| = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_n a_n.$$

Scegliamo $b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$ e osserviamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Dato che $\sum_n \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n a_n$ diverge positivamente quindi $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ non converge assolutamente.

**9.** La funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy^2 - yx^2$

► (a) non è né superiormente né inferiormente limitata

(b) è limitata superiormente ma non inferiormente

(c) è limitata inferiormente ma non superiormente

(d) è limitata

*Soluzione*:

$$f(x,y) = xy^2 - yx^2$$

Consideriamo la restrizione alla retta $y = 2x$

$$g(x) = f(x,2x) = x \cdot 4x^2 - 2x \cdot x^2 = 4x^3 - 2x^3 = 2x^3$$

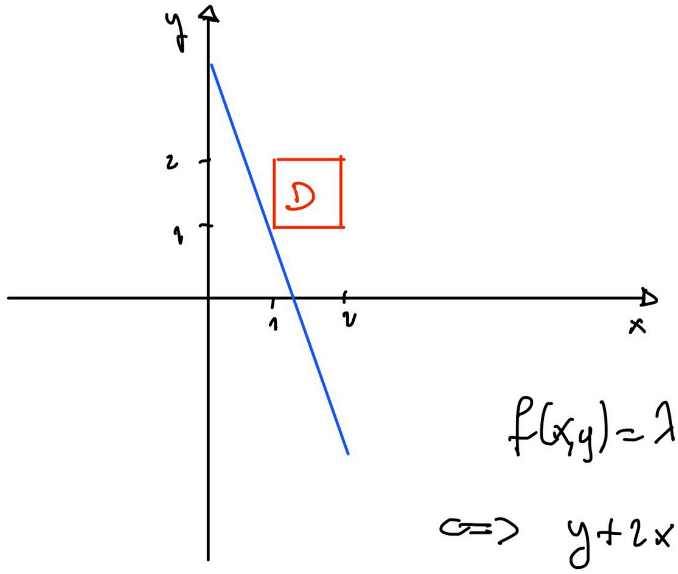
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

quindi $f$ non è né superiormente né inferiormente limitata.

**10.** Il minimo della funzione $f(x,y) = e^{y+2x}$ sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$ vale

(a) $e^6$ (b) $e^4$ (c) $e^5$ ▶ (d) $e^3$

*Soluzione*:




Il dominio è un quadrato di lato 1 con i bordi compresi.

Cerchiamo gli insiemi di livello di $f$.

$$f(x,y) = \lambda \iff e^{y+2x} = \lambda$$

$$\iff y + 2x = \log \lambda \quad (\lambda > 0).$$

Quindi l'insieme di livello $\lambda$ è la retta di equazione

$y = -2x + \log \lambda$.

Al crescere di $\lambda$ la retta interseca l'asse $y$ sempre più in alto quindi il minimo corrisponderà alla retta "più bassa" che interseca $D$. Il punto di intersezione sarà quindi $(1,1)$

e $\min(f) = f(1,1) = e^{1+2} = e^3$.

| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 772499<br>18 giugno 2024 |
|---|---|---|

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

| | |
|---|---|
| 1 | d |
| 2 | c |
| 3 | d |
| 4 | b |
| 5 | b |
| 6 | a |
| 7 | d |
| 8 | a |
| 9 | d |
| 10 | d |

**1.** La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$

(a) non ha né massimo né minimo

(b) ha minimo ma non ha massimo

(c) ha sia massimo che minimo

► (d) ha massimo ma non ha minimo

*Soluzione*:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$

La funzione $f$ è continua e pari.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Dato che $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, dal teorema di Weierstrass generalizzato, segue che $f$ ha massimo ma non ha minimo.

**2.** La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin(x^2+1)}{x}$

(a) è inferiormente limitata ma non ha minimo

(b) è superiormente limitata ma non ha massimo

▶ (c) ha minimo

(d) ha massimo

*Soluzione*:

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \dfrac{\sin(x^2+1)}{x}$

$f$ è continua, proviamo ad applicare il teorema di Weierstrass generalizzato.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(x^2+1)}{x} = \dfrac{\sin 1}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow f$ non ha massimo

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x^2+1)}{x} = \dfrac{\text{limitata}}{+\infty} = 0$.

Verifichiamo che $f$ assume valori negativi:

$f(\sqrt{\pi}) = \dfrac{\sin(\pi+1)}{\sqrt{\pi}} < 0$

quindi $f$ ha minimo.

**3.** $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x \cos(3x^2)\, dx =$

(a) $\dfrac{1}{6}\left(\sin\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} - \sin\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\right)$

(b) $-2\pi - 1$

(c) $-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$

▶ (d) $-\dfrac{1}{6}$

*Soluzione*:

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$t = 3x^2$ , $\frac{dt}{dx} = 6x$ , $x\,dx = \frac{dt}{6}$

$$\int x\cos(3x^2)\,dx = \int \frac{\cos t}{6}\,dt = \frac{1}{6}\sin t + c = \frac{1}{6}\sin(3x^2) + c$$

Dal teorema di Torricelli avremo:

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\cos(3x^2)\,dx = \left[\frac{1}{6}\sin(3x^2)\right]_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{6}(0-1) = -\frac{1}{6}$$

**4.** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |x| \sin x \, dx =$

(a) $\pi^2$ ► (b) $\pi - 1$ (c) $0$ (d) $\pi + 1$

*Soluzione*:

Osserviamo che la funzione $f(x) = |x| \sin x$ è dispari

quindi $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x| \sin x \, dx = 0$. Allora

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} |x| \sin x \, dx = \int_{\pi/2}^{\pi} |x| \sin x \, dx = \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin x \, dx$$

Integrando per parti (derivando $x$ e integrando $\sin x$):

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = -x\cos x + \sin x + c$$

$$\Rightarrow \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin x \, dx = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_{\pi/2}^{\pi} = -\pi \cos(\pi) + \cancel{\sin \pi} + \cancel{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \pi - 1.$$

**5.** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \, dx$

(a) converge ma non converge assolutamente ► (b) converge assolutamente

(c) diverge positivamente (d) non esiste

*Soluzione*:

Sia $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$. La funzione $f$ non è definita per $x=0$, dividiamo quindi l'intervallo nel punto $x=1$.

Per $x \in (0,1]$ $f(x) \geq 0$ e per $x \to 0$ $\sin x = x + o(x^2)$

quindi $f(x) = \frac{x+o(x^2)}{x^{3/2}} = \frac{x\,(1+o(x))}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}(1+o(x))$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e applichiamo il confronto asintotico.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, quindi $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge e converge anche assolutamente perché $|f(x)| = f(x)$.

Per $x \in [1,+\infty)$ consideriamo $|f(x)|$.

$$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, per il criterio del confronto $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

**6.** Sia $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\,dt$. Risulta che

► (a) $F$ è limitata

(b) $F$ ha un asintoto verticale

(c) $F$ è debolmente crescente

(d) $F$ è debolmente decrescente

*Soluzione*:

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad F(x)=\int_0^x \frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\,dt$.

$F$ è continua in $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\,dt$$

Scegliamo $g(t)=\frac{1}{t^2}$ e osserviamo che $\left|\frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\right|\le\frac{1}{t^2}$.

Dato che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ converge, dal criterio del confronto, anche $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\right|dt$ converge. Per il criterio dell'assoluta convergenza, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\,dt$ converge. Dato che $\frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}$ è continua in $[0,1]$ avremo che anche $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\,dt$ converge.

Ne segue che $\lim_{x\to\infty}F(x)$ esiste finito.

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\int_0^{-\infty}\frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\,dt=-\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\,dt$$ che converge per gli stessi motivi dell'integrale precedente.

Dato che $\lim_{x\to\infty}F(x)$ e $\lim_{x\to-\infty}F(x)$ sono entrambi finiti, dal teorema di Weierstrass generalizzato otteniamo che $F$ è limitata.

**7.** $\lim_{n\to+\infty}\arctan\left(\frac{e^n}{n^2+1}\right)=$

(a) non esiste $\qquad$ (b) $0$ $\qquad$ (c) $+\infty$ $\qquad$ ► (d) $\frac{\pi}{2}$

*Soluzione*:

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2+1} = +\infty$ per gerarchia di infiniti, quindi

$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{n^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

**8.** $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

► (a) converge ma non converge assolutamente

(b) è indeterminata

(c) converge assolutamente

(d) diverge positivamente

*Soluzione*:

$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ Poniamo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ e osserviamo

che $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $(a_n)$ è decrescente quindi, per il criterio di Leibniz la serie converge.

Vediamo ora la convergenza assoluta.

$\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}\right| = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_n a_n$.

Scegliamo $b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$ e osserviamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Dato che $\sum_n \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n a_n$ diverge positivamente

quindi $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ non converge assolutamente.

**9.** La funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy^2 - yx^2$

(a) è limitata

(b) è limitata superiormente ma non inferiormente

(c) è limitata inferiormente ma non superiormente

► (d) non è né superiormente né inferiormente limitata

*Soluzione*:

$$f(x,y) = xy^2 - yx^2$$

Consideriamo la restrizione alla retta $y = 2x$

$$g(x) = f(x, 2x) = x \cdot 4x^2 - 2x \cdot x^2 = 4x^3 - 2x^3 = 2x^3$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \, , \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

quindi $f$ non è né superiormente né inferiormente limitata.

**10.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^4 \left(\log(2x^2 + 2y^2) + 1\right) =$

(a) $-\infty$ (b) non esiste (c) $+\infty$ ▶ (d) 0

*Soluzione*:

Scriviamo la funzione in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta \end{cases}$$

$$g(\rho, \vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \rho^4 \cos^4\vartheta \left(\log(2\rho^2\cos^2\vartheta + 2\rho^2\sin^2\vartheta) + 1\right) =$$

$$= \rho^4 \cos^4\vartheta \left(\log(2\rho^2) + 1\right)$$

dimostriamo che la funzione tende a 0.

$$|g(\rho,\vartheta) - 0| = |\rho^4 \cos^4\vartheta \left(\log(2\rho^2) + 1\right)| \leq \rho^4 |\log(2\rho^2) + 1| =$$

$$= \rho^4 |\log 2 + 2\log\rho + 1| \leq \rho^4 (1 + \log 2) + 2\rho^4 |\log\rho| \to 0$$

dove abbiamo utilizzato il limite notevole

$$\lim_{\rho \to 0^+} \rho \log\rho = 0 .$$